Capitolo 6 – Il trade-off tra rendimento atteso e rischio

Obiettivi del capitolo:
Come si può individuare la composizione ottimale di un portafoglio, dal punto di vista del rendimento atteso e della volatilità?

- CAL – Capital Allocation Line: insieme delle opportunità disponibili quando si modificano le quote investite negli asset (rischioso e risk-free)
- Se il tasso di interesse sui fondi presi a prestito è maggiore del rendimento atteso degli asset, la CAL è una «spezzata»

La costruzione di un portafoglio

Un portafoglio è un insieme di titoli con un rendimento uguale alla media ponderata dei rendimenti dei singoli asset, dove i pesi sono dati dall'importanza relativa di ciascun asset nella composizione del portafoglio

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i \ ; \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

Caso particolare – 2 asset:

- asset risk-free, con rendimento certo r_f
- asset rischioso (o portafoglio con p asset rischiosi), con rendimento r_p

$$r_c = w_1 r_p + w_2 r_f = w_1 r_p + (1 - w_1) r_f$$

La costruzione di un portafoglio / 2

- asset rischioso (o portafoglio con p asset rischiosi), con rendimento r_p

$$r_c = w_1 r_p + w_2 r_f = w_1 r_p + (1 - w_1) r_f$$

- L'investitore sceglie i pesi w in modo da raggiungere la combinazione rischio-rendimento che risulta più funzionale al suo grado di avversione al rischio
- La funzione di utilità è definita sulla media e sulla varianza del rendimento
  - ➢ Dobbiamo descrivere il rendimento atteso e la varianza del rendimento del portafoglio

Rendimento atteso e volatilità del portafoglio

- asset rischioso (o portafoglio con p asset rischiosi), con rendimento r_p

$$r_c = w_1 r_p + w_2 r_f = w_1 r_p + (1 - w_1) r_f$$

- I pesi w vengono scelti all'inizio del periodo, e sono quindi una grandezza nota, così come è noto il rendimento r_f

$$Er_c = E\left(w_1 r_p + (1 - w_1) r_f\right) = w_1 Er_p + (1 - w_1) r_f$$

$$Er_c = r_f + w_1 \left(Er_p - r_f\right)$$

- Il rendimento atteso del portafoglio può essere scomposto nella somma del rendimento ottenuto da due portafogli:
  - 100% nel risk-free
  - Investimento di quota w_1 del patrimonio in un portafoglio «long-short»

Rendimento atteso e volatilità del portafoglio / 2

$$Er_c = r_f + w_1(Er_p - r_f)$$

- Il rendimento atteso del portafoglio può essere scomposto nella somma del rendimento ottenuto da due portafogli:
  - 100% nel risk-free
  - Investimento di quota w_1 del patrimonio in un portafoglio «long-short»

Il portafoglio può essere «long» nel portafoglio rischioso e «short» nell'asset risk-free (i.e. un investimento «fatto a leva»)

- Investire un patrimonio di 100 per 40 nell'asset risk-free e per 60 in quello rischioso equivale a investire 100 nell'asset risk-free e 40 nell'asset rischioso prendendo a prestito (indebitandosi) per 40
  - Solo però se il tasso a cui ci si indebita è uguale a quello che si riceve acquistando titoli o contratti senza rischio

Rendimento atteso e volatilità del portafoglio / 3

$$r_c = w_1 r_p + w_2 r_f = w_1 r_p + (1 - w_1) r_f$$
$$Er_c = r_f + w_1 (Er_p - r_f)$$

La varianza del rendimento del portafoglio sarà dato da:

$$\sigma_c^2 = E(r_c - Er_c)^2 = (nota\ 1) = w_1^2 \sigma_p^2$$

Mentre la deviazione standard (≈ scarto quadratico medio) è data da:

$$\sigma_c = w_1 \sigma_p$$

Il rapporto tra l’extra rendimento del portafoglio rischioso e la sua volatilità:

$\frac{w_1(Er_p - r_f)}{w_1 \sigma_p}$ è noto come rapporto di Sharpe (Sharpe *ratio*), una misura che consente di analizzare la performance di un investimento, tenendo conto del rischio che comporta quell'investimento

Sharpe ratio

$$\frac{w_1(Er_p - r_f)}{w_1\sigma_p} = \frac{(Er_p - r_f)}{\sigma_p}$$

	Portafoglio A	Portafoglio B	BOT 6mesi
Rendimento	10%	8%	-0.35%
Volatilità	20%	5%	
Sharpe ratio	0,5175	1,67	

- Il portafoglio A ha un rendimento maggiore del 2% sul portafoglio B, ma il suo rischio (volatilità) è stato 4 volte maggiore

L'indice di Sharpe permette di capire

- quale portafoglio è più efficiente in termini di rischio/rendimento, e quindi di individuare il gestore più efficiente
- se per assicurarsi un dato rendimento, la volatilità è compatibile con il proprio profilo di rischio

Sharpe ratio / 2

Principali limiti:

- la scelta del tasso risk-free condiziona l'efficienza dei portafogli
  - con tassi risk-free vicini a zero sono privilegiati i portafogli «difensivi», mentre se il tasso risk-free è più alto, i portafogli più vivaci sono più efficienti
- non è in grado di distinguere tra perdite intermittenti e consecutive poiché la misura del rischio è indipendente dall'ordine dei vari punti dati
  - potrebbe essere controproducente decidere su un portafoglio che ha una quota significativa di azioni che stanno perdendo valore negli ultimi periodi di negoziazione
- è retrospettivo e tiene conto dei rendimenti storici e della volatilità
  - le decisioni basate sul rapporto presuppongono che la performance futura sarà simile al passato

Sharpe ratio / 3

Beautiful chart.
Low Variability.
Nice, consistent returns.

Low risk?

Sharpe ratio / 4

Sharpe ratio / 5

Elena ha portafoglio investito al 60% in asset rischioso e 40% in risk-free, con $r_f = 6\%$; $Er_p - r_f = 10\%$; $\sigma_p = 14\%$. *Elena vuole conoscere* Er_c, σ_c *e indice di Sharpe.*

$$Er_p = r_f + \left(Er_p - r_f\right) = 16\%$$

$$Er_c = w_1 Er_p + (1 - w_1) r_f = 0{,}6 * 0{,}16 + 0{,}4 * 0{,}06 = 12\%$$

$$\sigma_c = w_1 \sigma_p = 0{,}6 * 0{,}14 = 8{,}4\%$$

$$Sharpe: \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{10}{14} = 0{,}71$$

CAL – capital allocation line

Individuiamo una equazione che metta in relazione il rendimento atteso con la volatilità del rendimento:

Partendo da: $\sigma_c = w_1 \sigma_p$ otteniamo: $w_1 = \frac{\sigma_c}{\sigma_p}$

Sostituiamo in: $Er_c = w_1 Er_p + (1 - w_1) r_f = \frac{\sigma_c}{\sigma_p} Er_p + \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_p}\right) r_f$

E otteniamo (nota 2): $Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$

Questa relazione lineare è la CAL

- indica come varia –al variare della volatilità- il rendimento atteso del portafoglio che combina il portafoglio rischioso e l'asset risk-free
  - massimo rendimento atteso che si può ottenere per ogni livello di volatilità
  - volatilità che è necessario tollerare per ottenere come target un certo rendimento atteso

CAL – capital allocation line / 2

CAL: $Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$; $\sigma_c = w_1 \sigma_p$

Due possibili investimenti: a) asset risk-free con $r_f = 2\%$; b) asset rischioso con $Er_p = 5\%$; $\sigma_p = 20\%$

- Si ritiene che r_f sia troppo basso e che $\sigma_p = 20\%$ sia invece troppo «rischioso» per il corrispondente $Er_p = 5\%$
  - ➢ Bisogna rappresentare tutto l'insieme di possibilità di investimento mediante la CAL

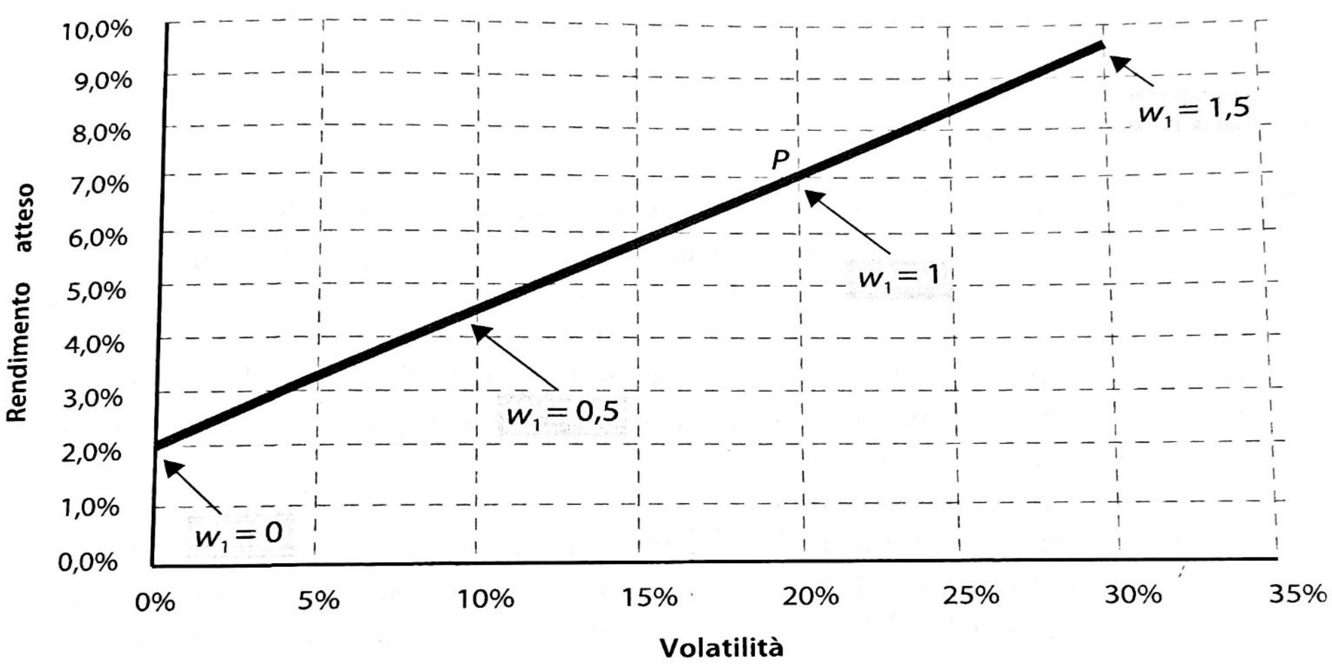
Intercetta: $r_f = 0{,}02$

Pendenza: $\frac{Er_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{0{,}05 - 0{,}02}{0{,}2} = 0{,}15$

CAL – capital allocation line / 3

CAL: $Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$; $\sigma_c = w_1 \sigma_p$

Figura 6.1 La Capital Allocation Line



Si usa la leva finanziaria prendendo a prestito al tasso r_f e investendo nell'asset rischioso con $Er_p > r_f$

- *aumenta il rendimento atteso ma anche il rischio*

$r_f = 2\%$; $Er_p - r_f = 5\%$; $\sigma_p = 20\%$

Disegniamo la CAL per quattro diverse ipotesi:

$w_1 = [0\ ;0{,}5\ ;1;1{,}5]$

- il punto P corrisponde ad un portafoglio investito al 100% in asset rischioso
- a sinistra di P ci sono portafogli investiti in asset rischioso e risk-free
- a destra di P i punti rappresentano investimenti di valore superiore al patrimonio iniziale, grazie alla leva finanziaria (indebitamento)
- intercetta: 0,02 ; pendenza: 5/20

CAL – capital allocation line / 4

CAL: $Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$; $\sigma_c = w_1 \sigma_p$

CAL con leva finanziaria – Patrimonio iniziale = 100

- $r_f = 2\%; Er_p = 7\%;\ \sigma_p = 20\%$
- Obiettivo $Er_c = 8\%$, con possibilità di indebitarsi per 20
  - Determinare rischio e rendimento atteso legato al debito

Il rendimento atteso sarà: $Er_c = w_1 r_p + (1 - w_1) r_f = 1{,}2 * 0{,}07 - 0{,}2 * 0{,}02 = 8\%$

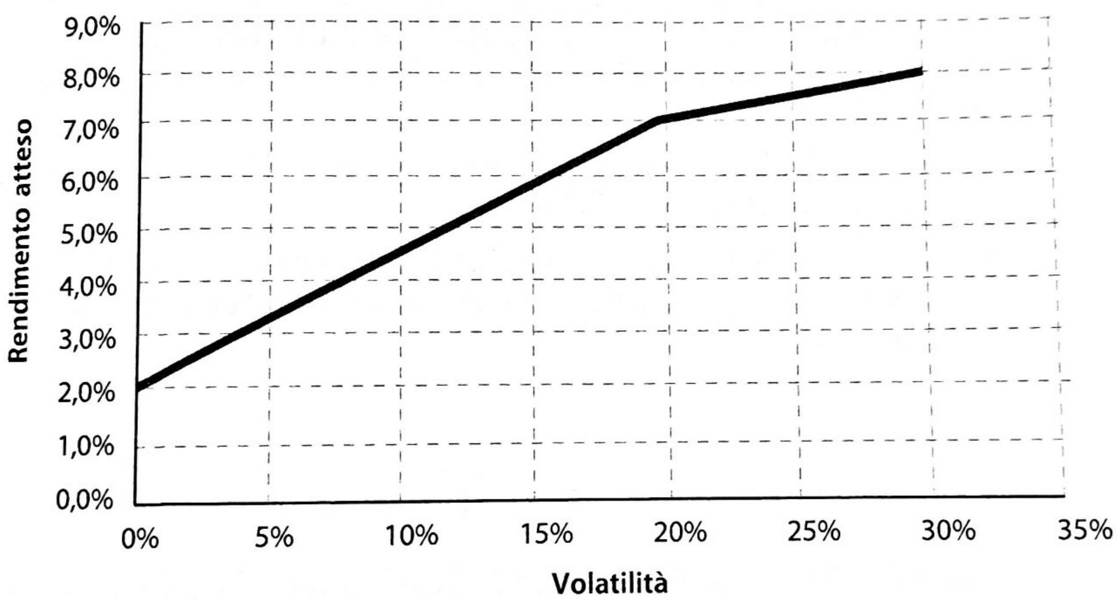
La volatilità del portafoglio invece: $\sigma_c = w_1 \sigma_p = 1{,}2 * 0{,}2 = 24\%$

CAL – capital allocation line / 5

CAL: $Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$; $\sigma_c = w_1 \sigma_p$

CAL con leva finanziaria – costo del debito superiore al tasso risk-free $r_B > r_f$

Figura 6.2 La Capital Allocation Line quando il costo del debito è superiore a risk-free



- Se il portafoglio è investito sia in asset risk-free sia rischioso:

$$Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$$

- Se ci si indebita, invece:

$$Er_c = r_B + \sigma_c \left(\frac{Er_c - r_B}{\sigma_p} \right)$$

CAL – capital allocation line / 6

CAL: $Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$; $\sigma_c = w_1 \sigma_p$

CAL con leva finanziaria – costo del debito superiore al tasso risk-free $r_B > r_f$

- $r_f = 2\%; Er_p = 5\%;\ \sigma_p = 20\%$
- Possibilità di indebitarsi (bassa avversione al rischio) con $r_B = 4\%$

$$1)\ Er_c = 0{,}02 + \sigma_c \frac{0{,}05 - 0{,}02}{0{,}2}$$

Per livelli di volatilità > 20%

$$2)\ Er_c = 0{,}04 + \sigma_c \frac{0{,}05 - 0{,}04}{0{,}2}$$

n.b. cambia sia l'intercetta sia la pendenza (più piatta)

- Se il portafoglio è investito sia in asset risk-free sia rischioso:

$$Er_c = r_f + \sigma_c \frac{Er_p - r_f}{\sigma_p}$$

- Se ci si indebita, invece:

$$Er_c = r_B + \sigma_c \left(\frac{Er_c - r_B}{\sigma_p} \right)$$